

EINE VERALLGEMEINERTE CECHSCHÉ
HOMOLOGIE- UND COHOMOLOGIE-THEORIE ÜBER
PARAKOMPAKTEN RÄUMEN

(Auszug)



Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Erhard Luft
aus Altwalddorf

Mathematisches Institut der Universität , Bonn , 1959

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen

Tag der mündlichen Prüfung : 26. 11. 1958

Dekan : Universitätsprofessor Dr. R. Fleischmann

Berichterstatter : Universitätsprofessor Dr. G. Nöbeling

Berichterstatter : Privatdozent Dr. H.J. Kowalsky

Sonderdruck aus : Bonner Mathematische Schriften , Band 8 (1959)

BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

Herausgeber:

F. HIRZEBRUCH, W. KRULL, E. PESCHL, H. UNGER

Nr. 8

Erhard Luft

*Eine Verallgemeinerung der
ČECHschen Homologietheorie*

BONN 1959

Als Manuskript gedruckt im
Mathematischen Institut der Universität
Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen am 18. April 1959

EINLEITUNG

Für die Čech'schen Cohomologiegruppen eines parakompakten Raumes mit Koeffizienten in einer Garbe liegt eine Axiomatik vor (Ausarbeitung des Seminaire Henri Cartan 1950-51). Die Dualität zwischen der Cohomologie - und der Homologietheorie legt es nahe, eine analoge Axiomatik für die Homologiegruppen zu suchen. Eine unmittelbare Übertragung der Cohomologie-Axiome auf die Homologietheorie scheitert jedoch bereits daran, daß es nicht möglich zu sein scheint, das duale Gegenstück zum Garbenbegriff zu definieren. Nun sind glücklicherweise (wenigstens für einen parakompakten Raum) die Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in einer Garbe eindeutig bestimmt durch die Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in einem Garbendatum und umgekehrt. Zu dem Begriff des Garbendatums liegt aber das duale Gegenstück im Begriff der "inversen Gruppenfamilie" vor. Wir stellen uns daher die Aufgabe, erstens zwei duale Axiomensysteme aufzustellen : das eine für die Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in einem Garbendatum, das andere für die Homologiegruppen mit Koeffizienten in einer inversen Gruppenfamilie, und zweitens zu zeigen, daß die Čech'schen Cohomologie- bzw. Homologiegruppen diesen Axiomen genügen. Auf diese Weise werden durch die nullten Cohomologie- bzw. Homologiegruppen die höherdimensionalen eindeutig bestimmt sein.

Wir führen dieses Programm im folgenden nur für die Homologiegruppen durch. Für die Cohomologiegruppen verlaufen die Überlegungen analog.

Da in unsere Überlegungen nur die offenen Mengen des zugrundeliegenden parakompakten Raumes eingehen und man die Parakompaktheit des Raumes im Verband seiner offenen Mengen beschreiben kann, wäre es möglich, die Untersuchungen für einen Verband mit einer der Parakompaktheit entsprechenden Eigenschaft durchzuführen. Der Einfachheit wegen verzichten wir jedoch auf diese Verallgemeinerung.

Für wertvolle Ratschläge und Anregungen zu dieser Arbeit möchte ich Herrn Professor Dr. G. Nöbeling meinen herzlichen Dank aussprechen.

Diese Arbeit enthält den Hauptteil meiner von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen angenommenen Dissertation "Eine verallgemeinerte Čechsche Homologie- und Cohomologietheorie über parakompakten Räumen". (D 29; 1958)

III

INHALTSVERZEICHNIS

§ 1	Definitionen und Vorbereitungen	1
	(1.1.) Eine Eigenschaft parakompakter Räume	1
	(1.2.) Inverse Gruppenfamilien	2
§ 2	Inverse Gruppenfamilien als Basis für eine Homologiethorie	11
§ 3	Eindeutigkeit der Homologiethorie	13
§ 4	Konstruktion einer verallgemeinerten Čech'schen Homologiethorie	23
Literaturverzeichnis -		41



Digitized by the Internet Archive
in 2026

§ 1 . DEFINITIONEN UND VORBEREITUNGEN.

1.1. Eine Eigenschaft parakompakter Räume.

Topologische Räume werden mit lateinischen Buchstaben $X, P, \dots$ bezeichnet (die leere Menge mit Λ). Unter einer Überdeckung α des topologischen Raumes X werde ein indiziertes System $\alpha = \{U_i\}_{i \in I_\alpha}$ von offenen Mengen U_i von X verstanden, deren Vereinigung gleich X ist. Eine Überdeckung $\beta = \{V_j\}_{j \in I_\beta}$ heißt eine Verfeinerung von α - in Zeichen $\alpha < \beta$ - wenn es eine Abbildung $t: I_\beta \longrightarrow I_\alpha$ gibt so, daß $V_j \subseteq U_{t(j)}$ für alle $j \in I_\beta$ gilt. Eine Überdeckung $\alpha = \{U_i\}_{i \in I_\alpha}$ heiße lokal-endlich, wenn jeder Punkt des Raumes X eine Umgebung besitzt, die nur für endlich viele $i \in I_\alpha$ mit den offenen Mengen U_i nicht leeren Durchschnitt besitzt.

DEFINITION (1.1.1.) Ein topologischer Raum P heißt parakompakt, wenn er das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt, und wenn es zu jeder Überdeckung α von P eine Überdeckung β von P gibt, die α verfeinert und lokal-endlich ist.

Für das weitere ist nun folgende Eigenschaft der Überdeckungen eines parakompakten Raumes entscheidend :

SATZ (1.1.2.) Ist $\alpha = \{U_i\}_{i \in I_\alpha}$ eine beliebige Überdeckung eines parakompakten Raumes P , dann gibt es eine Verfeinerung $\beta = \{V_i\}_{i \in I_\beta}$ von α , eine Überdeckung $\beta' = \{V'_i\}_{i \in I_\beta}$ von P und eine Verfeinerung $\gamma = \{W_j\}_{j \in I_\gamma}$ von β mit folgenden Eigenschaften :

1) Für jedes j gilt $W_j \cap V_i \neq \Lambda$ für höchstens endlich viele i .

2) Falls $W_j \cap V_i^! \neq \Lambda$ ist, so folgt $W_j \subseteq V_i$.

Die Gesamtheit $\{\beta, \beta', \gamma\}$ heiße ein zu α gehöriges feines Überdeckungssystem.

BEWEIS. Zunächst gibt es zu α eine lokal-endliche Verfeinerung $\beta = \{V_i\}_{i \in I_\beta}$. Da P parakompakt ist, ist P auch normal. Folglich gilt der Schrumpfungssatz (vgl. z.B. [4] Seite 85). Es existiert eine Verfeinerung $\beta' = \{V_i^!\}_{i \in I_\beta}$ mit $\overline{V_i^!} \subseteq V_i$ für jedes $i \in I_\beta$. Die Überdeckung γ wird nun folgendermaßen konstruiert. Die Indexmenge I_γ sei die Punktmenge P . Weil β lokal-endlich ist, gibt es zu jedem Punkt $p \in P$ eine Umgebung $W_0(p)$ mit $W_0(p) \cap V_i \neq \Lambda$ für nur endlich viele Indizes i . Wir betrachten nun die endlich vielen Fälle $W_0(p) \cap V_i^! \neq \Lambda$ ($V_i^! \subseteq V_i$!) $i = i_1, \dots, i_n$ und führen für den ersten Index i_1 folgende Fallunterscheidungen durch:

a) $p \in \overline{V_{i_1}^!}$, dann werde $W_1(p) = W_0(p) \cap V_{i_1}$ gesetzt, also $W_1(p) \subseteq V_{i_1}$.

b) $p \notin \overline{V_{i_1}^!}$, dann sei $W_1(p) = W_0(p) \cap \overline{V_{i_1}^!}$ gesetzt, also $W_1(p) \cap V_{i_1}^! = \Lambda$.

Für die offene Menge $W_1(p)$ führen wir den gleichen Prozeß mit dem Index i_2 aus usw.. Nach n Schritten setzen wir $W_p = W_n(p)$. Die Überdeckung $\gamma = \{W_p\}_{p \in P}$ erfüllt offensichtlich die Bedingungen 1) und 2).

1.2. Inverse Gruppenfamilien.

Der Inhalt des folgenden ist algebraischer Natur. Es werden die für eine Verallgemeinerung der Čechschen Homologietheorie erforderlichen Begriffe bereitgestellt und Folgerungen daraus gezogen.

DEFINITION (1.2.1.) Eine inverse Gruppenfamilie $\mathcal{G}_X = \{G_U, \pi_U^U\}$ über dem topologischen Raum X liegt vor, wenn jeder offenen Menge U von X eine abelsche Gruppe G_U zugeordnet ist, speziell der leeren Menge: $G_\emptyset = 0$ (Null), ferner zwei offenen Mengen U, V mit $U \subseteq V$ ein Homomorphismus $\pi_V^U : G_U \longrightarrow G_V$ derart, daß π_U^U die Identität ist und für $U \subseteq V \subseteq W$ $\pi_W^U = \pi_W^V \cdot \pi_V^U$ gilt. (Anmerkung: Alle Ausführungen gelten auch für inverse Gruppenfamilien deren Gruppen einen festen Operatorenbereich besitzen - also für Moduln, Ringe usw.). Wir schreiben die Gruppen additiv (die Einheit ist also die Null).

DEFINITION (1.2.2.) Ein Homomorphismus $\mathcal{Y} : \mathcal{G}_X \longrightarrow \mathcal{Y}_X$ zweier inverser Gruppenfamilien $\mathcal{G}_X = \{G_U, \pi_V^U\}$, und $\mathcal{Y}_X = \{H_U, \mu_V^U\}$ über dem topologischen Raum X ist eine Menge von Homomorphismen $\mathcal{Y}_U : G_U \longrightarrow H_U$, wobei U die offenen Mengen von X durchläuft, und für die $\mu_V^U \cdot \mathcal{Y}_U = \mathcal{Y}_V \cdot \pi_V^U$ gilt, falls $U \subseteq V$ ist.

Sind $\mathcal{Y} : \mathcal{G}_X \longrightarrow \mathcal{Y}_X$ und $\mathcal{Z} : \mathcal{Y}_X \longrightarrow \mathcal{K}_X$ Homomorphismen, dann ist auch $\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Y} = \{\mathcal{Z}_U \cdot \mathcal{Y}_U\}$ ein Homomorphismus $\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Y} : \mathcal{G}_X \longrightarrow \mathcal{K}_X$.

DEFINITION (1.2.3.) Die Homomorphismen $\mathcal{G}_X \xrightarrow{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}_X \xrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{K}_X$ bilden eine exakte Sequenz, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ gilt, daß der Kern des Homomorphismus $\mathcal{Y}_U : H_U \longrightarrow K_U$ gleich dem Bild $\mathcal{Y}_U(G_U)$ ist.

Wir benötigen noch folgende einfachen Sätze:

SATZ (1.2.4.) $\mathfrak{g}_X = \{G_U, \pi_V^U\}$ und $\mathfrak{g}_X'' = \{G_U'', \pi_V''^U\}$ seien zwei inverse Gruppenfamilien, $\eta: \mathfrak{g}_X \longrightarrow \mathfrak{g}_X''$ ein Homomorphismus auf $\mathfrak{g}_X$. Dann kann mittels des Kernes des Homomorphismus η eine exakte Sequenz gebildet werden: $0 \longrightarrow \mathfrak{g}_X' \xrightarrow{s} \mathfrak{g}_X \xrightarrow{\eta} \mathfrak{g}_X'' \longrightarrow 0$.

BEWEIS. Der Kern $\mathfrak{g}_X' = \{G_U', \pi_V'^U\}$ des Homomorphismus η ist folgendermaßen erklärt: Für jede offene Menge U sei G_U' der Kern des Homomorphismus η_U , für zwei offene Mengen U, V mit $U \subseteq V$ sei $\pi_V'^U$ die Beschränkung von π_V^U auf G_U' . Der Homomorphismus s ist die Inklusion von $\mathfrak{g}_X'$ in $\mathfrak{g}_X$.

SATZ (1.2.5.) Zu jedem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_X' & \xrightarrow{s} & \mathfrak{g}_X & \xrightarrow{\eta} & \mathfrak{g}_X'' \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}_X' & \xrightarrow{s'} & \mathfrak{g}_X & \xrightarrow{\eta'} & \mathfrak{g}_X'' \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{g}_X = \{G_U, \pi_V^U\}, \mathfrak{g}_X' = \{G_U', \pi_V'^U\} \\ \mathfrak{g}_X = \{H_U, \mu_V^U\}, \mathfrak{g}_X' = \{H_U', \mu_V'^U\} \end{array}$$

gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi': \mathfrak{g}_X' \longrightarrow \mathfrak{g}_X'$ so, daß das ganze Diagramm kommutativ ist. (Dieser Homomorphismus werde im folgenden mit $s'^{-1} \cdot \varphi \cdot s$ bezeichnet).

BEWEIS. Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist der Homomorphismus $\varphi'_U: G_U' \longrightarrow H_U'$ zu definieren. Es sei $g' \in G_U'$ vorgegeben. Auf Grund der Exaktheit der oberen Zeile ist $\eta'_U(\varphi_U \cdot s_U(g')) = \varphi''_U \cdot \eta_U \cdot s_U(g') = 0$. Die Exaktheit der unteren Zeile ergibt, daß genau ein $h' \in H_U'$ existiert mit $s'_U(h') = \varphi_U \cdot s_U(g')$. Wir setzen $\varphi'_U(g') = h' = s'^{-1}_U \cdot \varphi_U \cdot s_U(g')$. φ'_U ist eindeutig definiert und ist ein Homomorphismus. Weiterhin ist die Bedingung $\varphi'_V \cdot \pi_V'^U = \mu_V'^U \cdot \varphi'_U$ für $U \subseteq V$ erfüllt, wie man leicht nachrechnet; ebenso $s'_U \cdot \varphi'_U = \varphi_U \cdot s_U$.

Der Zusammenhang mit der klassischen Čech'schen Homologietheorie wird durch folgendes Beispiel hergestellt:

BEISPIEL (1.2.6.) G sei eine beliebige abelsche Gruppe, X sei ein topologischer Raum. Die konstante inverse Gruppenfamilie $G_X = \{G_U, \pi_V^U\}$ ist folgendermaßen definiert: Es seien $G_U = G$ für jede offene Menge $\Lambda \neq U \subseteq X$, $G_\Lambda = 0$, π_V^U die Identität für $\Lambda \neq U \subseteq V$ und π_V^Λ der Nullhomomorphismus.

Die relativen Homologiegruppen erhalten wir durch folgende Konstruktionen: A sei eine abgeschlossene Teilmenge von X , $\mathcal{G}_X = \{G_U, \pi_V^U\}$ eine inverse Gruppenfamilie. Zunächst werde die inverse Gruppenfamilie $\mathcal{G}(A)_X = \{G_U^!, \pi_V^{!U}\}$ erklärt. Für $U \cap A \neq \Lambda$ sei $G_U^! = G_U$ gesetzt, und für $U \cap A = \Lambda$ sei $G_U^! = 0$. Der Homomorphismus $\pi_V^{!U}$ sei für $U \subseteq V$ in passender Weise der Homomorphismus π_V^U oder der Nullhomomorphismus. Analog wird die inverse Gruppenfamilie $\mathcal{G}(X, A)_X = \{G_U'', \pi_V^{''U}\}$ definiert. Für jede offene Menge U aus X sei $G_U'' = G_U$, wenn $U \cap A = \Lambda$, und $G_U'' = 0$, wenn $U \cap A \neq \Lambda$. Für $U \subseteq V$ sei $\pi_V^{''U}$ wieder entweder der Homomorphismus π_V^U oder der Nullhomomorphismus. Man erhält somit eine exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(A)_X \xrightarrow{i} \mathcal{G}_X \xrightarrow{j} \mathcal{G}(X, A)_X \longrightarrow 0$$

wobei der Homomorphismus i die Inklusion ist und der Homomorphismus j ebenfalls in geeigneter Weise durch Identitäten und Nullhomomorphismen gebildet wird. Ist speziell G eine feste abelsche Gruppe, dann erhalten wir die exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow G(A)_X \xrightarrow{i} G_X \xrightarrow{j} G(X, A)_X \longrightarrow 0$$

Die Homologietheorie (§ 4) dieser Gruppenfamilien ergibt gerade die klassische Čech'sche Homologietheorie.

In der älteren Garbentheorie spielen die feinen Garben eine fundamentale Rolle. Wir stellen ihnen folgendes Analogon für die inversen

Gruppenfamilien gegenüber :

DEFINITION (1.2.7.) P sei ein parakompakter Raum. Eine inverse

Gruppenfamilie $\mathcal{F}_P = \{F_U, \sigma_V^U\}$ heiße fein, wenn folgen-

de Bedingungen erflt sind : Für mindestens ein feines

berdeckungssystem $\beta = \{V_i\}_{i \in I_\beta}$, $\beta' = \{V_i'\}_{i \in I_{\beta'}}$, $\gamma = \{W_j\}_{j \in I_\gamma}$
einer beliebigen Überdeckung α , für welches also gilt :

1) Für jedes j ist $W_j \cap V_i \neq \Lambda$ für höchstens endlich viele i ,

2) Wenn $W_j \cap V_i' \neq \Lambda$, so folgt $W_j \subseteq V_i$,

gibt es zu der Überdeckung β eine Menge $L = \{l_i^j\}_{i \in I_\beta}$

von Homomorphismen der inversen Gruppenfamilie $\mathcal{F}_P$

in sich, so daß für alle offenen Mengen U aus P mit

$U \subseteq W_j$ (wobei W_j eine beliebige offene Menge der über-

deckung γ ist) gilt :

1) $l_U^i(F_U) = 0$ falls $U \subseteq cV_i'$,

2) $\sum_i l_U^i$ ist die Identität für F_U .

(Ist $U \neq \Lambda$, dann gilt $U \cap V_i \neq \Lambda$ für nur endlich viele In-

dizes i wegen obiger Eigenschaften 1) und 2). Die Summe

in der letzten Bedingung besteht daher nur aus endlich vielen

von Nullhomomorphismen verschiedenen Homomorphismen,

ist also erklärt).

Die Gesamtheit $\{\beta, \beta', L, \gamma\}$ heiße ein feines System

bezüglich der Überdeckung α .

SATZ (1.2.8.) P sei ein parakompakter Raum, $\mathcal{G}_P = \{G_U, \pi_V^U\}$

eine inverse Gruppenfamilie. Dann gibt es eine exakte Se-

quenz : $0 \longrightarrow \mathcal{f}(\mathcal{G})_P \longrightarrow \mathcal{f}(\mathcal{G})_P \longrightarrow \mathcal{G}_P \longrightarrow 0$,

wobei $\mathcal{f}(\mathcal{G})_P$ eine feine inverse Gruppenfamilie ist.

BEWEIS I) Mittels der inversen Gruppenfamilien $\mathcal{G}_P$ konstruieren wir die feine inverse Gruppenfamilie $\mathcal{f}(\mathcal{G})_P = \{F(G)_U, \mathcal{G}_V^U\}$. Für jede offene Menge $U \neq \Lambda$ ($F(G)_\Lambda = 0$ natürlich!) von P sei $F(G)_U$ die Gruppe der Funktionen, die für alle Punkte $p \in U$ definiert sind mit Werten in der Gruppe G_U und die nur für endlich viele Punkte von Null verschiedene Werte annehmen. (In Zeichen: $f \in F(G)_U$, $f(p) \in G_U$ für $p \in U$). Für zwei offene Mengen U und V mit $\Lambda \neq U \subseteq V$ werde der Homomorphismus $\mathcal{G}_V^U : F(G)_U \longrightarrow F(G)_V$ folgendermaßen erklärt: Es sei $f \in F(G)_U$ vorgegeben, dann setzen wir $(\mathcal{G}_V^U f)(p) = 0$ für $p \in V$ aber $p \notin U$, und $(\mathcal{G}_V^U f)(p) = \kappa_V^U(f(p))$ für alle Punkte $p \in U$. (D.h. Erweiterung der Funktion f auf die größere Menge durch Nullsetzen und Ausführung des Homomorphismus κ_V^U bei den Funktionswerten!). ($\mathcal{G}_V^\Lambda$ bedeute die Abbildung auf die Funktion f mit $f(p) = 0$ für alle $p \in V$). $\mathcal{G}_V^U$ ist ein Homomorphismus, und es gilt für $U \subseteq V \subseteq W$ die Beziehung $\mathcal{G}_W^U = \mathcal{G}_W^V \cdot \mathcal{G}_V^U$, weiter ist $\mathcal{G}_U^U$ die Identität.

Die so definierte inverse Gruppenfamilie ist fein. Wir zeigen, daß die Bedingungen der Definition erfüllt werden können. $\{\beta, \beta', \gamma\}$ sei ein zu einer beliebig vorgegebenen Überdeckung α gehöriges feines Überdeckungssystem. Zu konstruieren ist die Homomorphismenmenge $L = \{1^i\}_{i \in I_\beta}$. Dazu wird die Indexmenge I_β wohlgeordnet, dann induktiv für jeden Index i aus I_β eine Operation κ^i definiert: κ^i ist eine Funktion mit der Punktmenge P als Definitionsbereich und zwei Werten "Identität" (1) und "Null" (0) als Wertebereich und ist folgendermaßen erklärt:

$$\text{Für } p \in P \text{ sei } \kappa^i(p) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } p \in V_1' \\ 0, & \text{wenn } p \in V_i' \text{ und } \kappa^j(p) = 1 \text{ für ein } j \text{ mit } j < i \\ 1, & \text{wenn } p \in V_i' \text{ und } \kappa^j(p) = 1 \text{ für kein } j \text{ mit } j < i. \end{cases}$$

(Da $\bigcup V_i' = P$ gilt, erhält jeder Punkt $p \in P$ für genau ein i den Wert 1 zugeordnet !) Mit Hilfe der Funktionen $\{\chi^i\}_{i \in I_B}$ werden nun die Homomorphismen $\{l_U^i\}_{i \in I_B}$ der inversen Gruppenfamilie $\{g\}_P$ in sich definiert. Der Homomorphismus l_U^i : Es sei eine Funktion f aus $F(G)_U$, $U \neq \Lambda$, vorgegeben. Dann werde gesetzt :

$$(l_U^i f)(p) = \chi^i(p) \circ f(p) = \text{Def.} \begin{cases} 0 & \chi^i(p) = 0 \\ f(p) & \text{falls} \\ & \chi^i(p) = 1 \end{cases}$$

(l_Λ^i ist der Nullhomomorphismus !). Die Kommutativitätsbedingung $\sigma_V^U \cdot l_U^i = l_V^i \cdot \sigma_V^U$ ist für $U \subseteq V$ erfüllt. Die Homomorphismenmenge L genügt den Bedingungen 1) und 2).

II) Der Homomorphismus $\eta : \{g\}_P \longrightarrow g_P$ von $\{g\}_P$ auf g_P wird in folgender Weise gebildet. Für eine offene Menge $U \neq \Lambda$ ist der Homomorphismus $\eta_U : F(G)_U \longrightarrow G_U$ zu erklären. Es sei $f \in F(G)_U$ vorgegeben. Dann setzen wir $\eta_U(f) = \sum_{p \in U} f(p)$; es ist also $\eta_U(f) \in G_U$. (Diese Summe ist definiert, denn nur für endlich viele Punkte $p \in U$ gilt $f(p) \neq 0$!). η_U ist ein Homomorphismus und auch eine Abbildung auf. Um das letztere zu zeigen, braucht man nur zu einem Element $g \in G_U$ eine passende Funktion $f \in F(G)_U$ anzugeben :

$$f(p) = \begin{cases} g & \text{für einen Punkt } p_0 \in U \quad (U \neq \Lambda !) \\ 0 & \text{für alle anderen } p \in U, p \neq p_0 \end{cases}$$

Es ist $\eta_U(f) = g \in G_U$. Für die Homomorphismen η_U ist die Kommutativitätsbedingung $\pi_V^U \cdot \eta_U = \eta_V \cdot \sigma_V^U$ erfüllt.

Die Anwendung des Satzes (1. 2. 4) ergibt die gesuchte exakte Sequenz.

Die so konstruierte "kanonische feine Auflösung" einer beliebigen inversen Gruppenfamilie $\underline{g}_P$ hat noch folgende Eigenschaft :

SATZ (1.2.9.) P sei ein parakompakter Raum .

1) Zu jedem Homomorphismus $\varphi: \underline{g}_P \longrightarrow \underline{g}'_P$ zweier inverser Gruppenfamilien kann man ein kommutatives Diagramm bilden (die Bezeichnungen beziehen sich auf den vorangegangenen Satz) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{f}(\underline{g})_P & \xrightarrow{\varphi} & \underline{f}(\underline{g})_P & \xrightarrow{\eta} & \underline{g}_P \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \underline{\lambda}(\varphi) & & \downarrow \lambda(\varphi) & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & \underline{f}(\underline{g}')_P & \xrightarrow{\varphi'} & \underline{f}(\underline{g}')_P & \xrightarrow{\eta'} & \underline{g}'_P \longrightarrow 0 \end{array}$$

2) Weiterhin ist zu jeder exakten Sequenz

$0 \longrightarrow \underline{g}'_P \xrightarrow{\varphi} \underline{g}_P \xrightarrow{\psi} \underline{g}''_P \longrightarrow 0$ von inversen Gruppenfamilien folgendes kommutative Diagramm definiert :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{g}'_P & \xrightarrow{\varphi} & \underline{g}_P & \xrightarrow{\psi} & \underline{g}''_P \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \tau & & \uparrow \eta & & \uparrow \text{id.} \\ 0 & \longrightarrow & \underline{g}'_P & \xrightarrow{\varphi} & \underline{f}(\underline{g})_P & \xrightarrow{\psi} & \underline{g}''_P \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \omega & & \downarrow \lambda(\varphi) & & \downarrow \text{id.} \\ 0 & \longrightarrow & \underline{f}(\underline{g}')_P & \xrightarrow{\varphi'} & \underline{f}(\underline{g}')_P & \xrightarrow{\eta''} & \underline{g}''_P \longrightarrow 0 \end{array}$$

BEWEIS 1) Zu definieren ist der Homomorphismus $\lambda(\varphi)$. Für jede offene Menge $U \neq \Lambda$ wird der Homomorphismus $\lambda(\varphi)_U: F(G)_U \longrightarrow F(H)_U$ folgendermaßen erklärt : Für $f \in F(G)_U$ sei $(\lambda(\varphi)_U f)(p) = \varphi_U(f(p))$ für $p \in U$ gesetzt. $\lambda(\varphi)_U$ ist ein Homomorphismus und die Kommutativitätsbedingung $\varphi_U \cdot \lambda(\varphi)_U = \lambda(\varphi)_U \cdot \varphi_U$ ist erfüllt. Nach dem Satz (1.2.5.) ist dann auch der Homomorphismus $\underline{\lambda}(\varphi)$ eindeutig definiert.

2) Die Homomorphismen und inversen Gruppenfamilien des Diagramms seien in folgender Weise definiert: Die unterste Zeile nach dem Satz (1.2.8.) , η , $\lambda(\Psi)$, $\bigoplus (\mathfrak{g})_{\mathfrak{p}}$ nach den vorangegangenen Konstruktionen. Weiterhin ist gesetzt : $\mathfrak{v} = \Psi \cdot \eta$ (es gilt andererseits auch $\mathfrak{v} = \eta \circ \lambda(\Psi)$!), $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}$ ist der Kern des Homomorphismus $\mathfrak{v}$, μ ist die natürliche Inklusion, $\tau = \eta^{-1} \cdot \eta \cdot \mu$, $\omega = s''^{-1} \lambda(\Psi) \cdot \mu$ nach Satz (1.2.5.).

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zur Definition einer Homologietheorie für die inversen Gruppenfamilien.

§ 2. INVERSE GRUPPENFAMILIEN ALS BASIS FÜR EINE HOMOLOGIETHEORIE.

Die Definition der Homologietheorie der inversen Gruppenfamilien ist vollkommen "dual" zur entsprechenden Definition der Cohomologietheorie für Garbendaten. Entscheidend sind die Axiome (4) und (5), über die der Begriff "fein" in das Axiomensystem eingeht. Die Axiome (1), (2), (3) und (6) fordern die üblichen Eigenschaften einer Homologietheorie. Die starke Fassung von Axiom (4) ist im allgemeinen nicht möglich (d. h. die zu einer beliebigen Sequenz $0 \longrightarrow \mathfrak{g}'_P \longrightarrow \mathfrak{g}_P \longrightarrow \mathfrak{g}''_P \longrightarrow 0$ gehörige Homologiesequenz ist i. A. nur halbexakt).

DEFINITION (2.1.) P sei ein parakompakter Raum. $\mathfrak{J}(P)$ die Klasse der inversen Gruppenfamilien über P ¹⁾. Eine Homologietheorie über $\mathfrak{J}(P)$ - in Zeichen $H(\mathfrak{J}(P))$ - ist eine Gesamtheit von drei Funktionen folgender Art :

- (I) Jeder inversen Gruppenfamilie und jeder ganzen Zahl q wird eine Gruppe $H_q(P, \mathfrak{g})$ zugeordnet, die q -dimensionale Homologiegruppe.
- (II) Jedem Homomorphismus $\mathfrak{y} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{y}$ und jeder ganzen Zahl q wird ein Homomorphismus $\mathfrak{y}_q : H_q(P, \mathfrak{g}) \longrightarrow H_q(P, \mathfrak{y})$ zugeordnet.
- (III) Jeder exakten Sequenz $0 \longrightarrow \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0$ und jeder ganzen Zahl q ist ein Homomorphismus $\partial_q : H_q(P, \mathfrak{g}'') \longrightarrow H_{q-1}(P, \mathfrak{g}')$ - der Randhomomorphismus - zugeordnet.

1) Da im folgenden ein fester parakompakter Raum P zugrundegelegt ist, lassen wir die Bezeichnung P bei den inversen Gruppenfamilien $\mathfrak{g}_P$ fort ; schreiben also nur noch das Symbol $\mathfrak{g}$.

Dabei sind folgende Axiome erfüllt :

- (1) Ist $\varepsilon : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ die Identität, dann ist auch $\varepsilon_q : H_q(P, \mathfrak{g}) \longrightarrow H_q(P, \mathfrak{g})$ für alle q die Identität.
- (2) Für je zwei Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ und $\psi : \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}''$ ist folgendes Diagramm kommutativ :

$$\begin{array}{ccc} H_q(P, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{(\psi \circ \varphi)_q} & H_q(P, \mathfrak{g}'') \\ & \searrow \varphi_q & \nearrow \psi_q \\ & H_q(P, \mathfrak{g}') & \end{array}$$

- (3) Für jedes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist folgendes Diagramm der Homologiegruppen kommutativ :

$$\begin{array}{ccc} H_q(P, \mathfrak{g}'') & \xrightarrow{\partial_q} & H_{q-1}(P, \mathfrak{g}'') \\ \downarrow \varphi''_q & & \downarrow \varphi'_q \\ H_q(P, \mathfrak{g}') & \xrightarrow{\partial_q} & H_{q-1}(P, \mathfrak{g}') \end{array}$$

- (4) Für jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathfrak{g}' \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0$, wobei $\mathfrak{g}$ eine feine inverse Gruppenfamilie ist, ist folgende Sequenz exakt :

$$\begin{aligned} H_0(P, \mathfrak{g}) &\xleftarrow{\varphi_0} H_0(P, \mathfrak{g}') \xleftarrow{\partial_1} H_1(P, \mathfrak{g}'') \xleftarrow{\psi_1} H_1(P, \mathfrak{g}) \xleftarrow{\varphi_1} H_1(P, \mathfrak{g}') \xleftarrow{\partial_2} \\ &\quad \xleftarrow{\partial_2} H_2(P, \mathfrak{g}'') \xleftarrow{\psi_2} H_2(P, \mathfrak{g}) \xleftarrow{\varphi_2} H_2(P, \mathfrak{g}') \xleftarrow{\partial_3} \end{aligned}$$

(Im Hinblick auf das Axiom (5) besitzt die Sequenz folgende spezielle Form :

$$\begin{aligned} H_0(P, \mathfrak{g}) &\longleftarrow H_0(P, \mathfrak{g}') \longleftarrow H_1(P, \mathfrak{g}'') \longleftarrow 0 \longleftarrow H_1(P, \mathfrak{g}') \\ 0 &\longleftarrow H_{q-1}(P, \mathfrak{g}'') \longleftarrow H_{q-1}(P, \mathfrak{g}) \longleftarrow 0 \end{aligned}$$

- (5) Ist $\mathfrak{g}$ eine feine inverse Gruppenfamilie, dann gilt: $H_q(P, \mathfrak{g}) = 0$ für $q \geq 1$.
- (6) Es ist $H_q(P, \mathfrak{g}) = 0$ für $q < 0$ (dies bedeutet eine Normierung).

§ 3. EINDEUTIGKEIT DER HOMOLOGIETHEORIE.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß über einem parakompakten Raum P die Homologietheorie bereits durch die nulldimensionale Theorie, d. h. durch die nulldimensionalen Homologiegruppen und deren Homomorphismen festgelegt ist. In den folgenden Ausführungen wird gleichzeitig ein Konstruktionsprinzip entwickelt, das es gestattet, alle höherdimensionalen Homologiegruppen und deren Homomorphismen aus den nulldimensionalen zu bestimmen. (Dies gilt also insbesondere für die klassischen Čechschen Homologiegruppen und deren Homomorphismen).

DEFINITION (3.1.) $H(\mathfrak{J}(P))$ und $\tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ seien zwei Homologietheorien über der Klasse $\mathfrak{J}(P)$ der inversen Gruppenfamilien über dem parakompakten Raum P .

1) Ein Homomorphismus $[h] : H(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ der beiden Homologietheorien $H(\mathfrak{J}(P))$ und $\tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ ist folgendermaßen definiert: Zu jeder inversen Gruppenfamilie und zu jeder ganzen Zahl q gibt es einen Homomorphismus $h_q : H_q(P, \mathfrak{g}) \longrightarrow \tilde{H}_q(P, \mathfrak{g})$, wobei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(I) Für jeden Homomorphismus $\mathfrak{v} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H_q(P, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\mathfrak{v}_q} & H_q(P, \mathfrak{g}') \\ \downarrow h_q & & \downarrow h_{q'} \\ \tilde{H}_q(P, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{v}}_q} & \tilde{H}_q(P, \mathfrak{g}') \end{array}$$

(II) Für jede exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0$ ist das zugehörige Diagramm der Randhomomorphismen kommutativ:

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(P, \mathfrak{g}') & \xrightarrow{\varphi_q} & H_{q-1}(P, \mathfrak{g}') \\
 \downarrow b_q & & \downarrow b_{q-1} \\
 \tilde{H}_q(P, \mathfrak{g}') & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_q} & \tilde{H}_{q-1}(P, \mathfrak{g}')
 \end{array}$$

2) Für jede inverse Gruppenfamilie $\mathfrak{g}$ sei ein Homomorphismus $\eta : H_0(P, \mathfrak{g}) \longrightarrow \tilde{H}_0(P, \mathfrak{g})$ gegeben mit der Eigenschaft, daß zu jedem Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ folgendes Diagramm kommutativ ist :

$$\begin{array}{ccc}
 H_0(P, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi_0} & H_0(P, \mathfrak{g}') \\
 \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\
 \tilde{H}_0(P, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_0} & \tilde{H}_0(P, \mathfrak{g}')
 \end{array}$$

Die Gesamtheit $\{\eta\}$ dieser Homomorphismen heiße ein Homomorphismus $[\eta]_0 : H_0(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathfrak{J}(P))$ der nulldimensionalen Homologietheorien.

3) Ein Homomorphismus $[h] : H(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ der beiden Homologietheorien $H(\mathfrak{J}(P))$ und $\tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ hat den Homomorphismus $[\eta]_0 : H_0(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathfrak{J}(P))$ als Basis, wenn gilt : $[h]_0 = [\eta]_0$ (d. h. die nulldimensionalen Homomorphismen stimmen überein).

4) Ein Homomorphismus $[h] : H(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ ist ein Isomorphismus, wenn alle Homomorphismen h_q Isomorphismen sind.

Nach dieser vorbereitenden Definition können wir den Hauptsatz formulieren :

SATZ (3.2.) Ist $[\eta]_0 : H_0(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathfrak{J}(P))$ ein Homomorphismus der nulldimensionalen Teile zweier Homologietheorien $H(\mathfrak{J}(P))$ und $\tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ über der Klasse $\mathfrak{J}(P)$ der inversen Gruppenfamilien über dem parakompakten Raum P , dann gibt es genau einen Homomorphismus $h : H(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ mit dem nulldimensionalen Homomorphismus $[\eta]_0$ als Basis.

BEWEIS (A) Die Eindeutigkeit des Homomorphismus $[h]$.

Angenommen es existiert ein Homomorphismus $[h]$ mit dem nulldimensionalen Homomorphismus $[\eta]_0$ als Basis. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach q , daß dann die Homomorphismen $\{h_q\}$ für alle inversen Gruppenfamilien und für alle ganzen Zahlen q eindeutig bestimmt sind.

1) Für $q = 0$ ist $[h]_0 = [\eta]_0$ nach Voraussetzung.

2) Wir nehmen nun an, daß für alle inversen Gruppenfamilien $\mathfrak{g}$ und für die ganze Zahl q die Homomorphismen h_q eindeutig bestimmt sind. Dann sind auch die Homomorphismen h_{q+1} eindeutig definiert. Es sei $\mathfrak{g}$ eine beliebige inverse Gruppenfamilie. Nach dem Satz (1.2.8.) können wir die Sequenz bilden :

$$0 \longrightarrow \underline{f(\mathfrak{g})} \longrightarrow f(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

Wegen des Axioms (4) existieren in beiden Homologietheorien $H(\mathfrak{J}(P))$ und $\tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ exakte Sequenzen, die durch den Homomorphismus $[h]$ verbunden sind. Wir betrachten folgendes Teilstück :

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(P, f(\mathfrak{g})) & \longleftarrow & H_q(P, f(\mathfrak{g})) & \longleftarrow & H_{q+1}(P, \mathfrak{g}) & \longleftarrow & 0 \\ \downarrow h_q \quad \text{(I)} & & \downarrow h_q \quad \text{(II)} & & \downarrow h_{q+1} & & \\ \tilde{H}_q(P, f(\mathfrak{g})) & \longleftarrow & \tilde{H}_q(P, f(\mathfrak{g})) & \longleftarrow & \tilde{H}_{q+1}(P, \mathfrak{g}) & \longleftarrow & 0 \end{array} \quad \text{(D)}$$

Nach Eigenschaft (I) und (II) ist das Diagramm (D) kommutativ. Wegen Axiom (5) verschwinden in beiden Theorien in den Zeilen die Gruppen $H_{q+1}(P, f(\mathfrak{g}))$ und $\tilde{H}_{q+1}(P, f(\mathfrak{g}))$ für $q \geq 1$. Analog zum Satz (1.2.5.) ist der Homomorphismus h_{q+1} eindeutig definiert.

(B) Die Existenz des Homomorphismus $[h]$:

In Teil (A) ist mittels der Methode der vollständigen Induktion über das Diagramm (D) gleichzeitig ein rekursives Konstruktionsverfahren für die Homomorphismen h_q durch den Homomorphismus $[\eta]_0$ gegeben. Der Homomorphismus h_q sei nun dadurch definiert. Es muß noch gezeigt werden, daß die Bedingungen (I) und (II) der Definition erfüllt sind.

(I) Für die Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ ist nachzuweisen, daß folgendes Diagramm kommutativ ist :

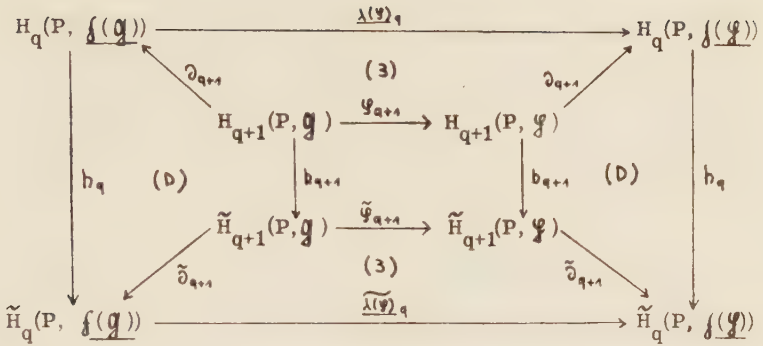
$$\begin{array}{ccc} H_q(P, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi_q} & H_q(P, \mathfrak{Y}) \\ \downarrow h_q & & \downarrow h_q \\ \tilde{H}_q(P, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_q} & \tilde{H}_q(P, \mathfrak{Y}) \end{array}$$

Dies geschieht durch vollständige Induktion nach q .

- 1) Für $q = 0$ ist die Aussage wegen der Voraussetzung über dem Homomorphismus $[\eta]_0$ richtig.
- 2) Wir nehmen jetzt an, daß für die ganze Zahl q die Kommutativitätsbedingung bereits gezeigt ist und schließen, daß sie dann auch für die ganze Zahl $q+1$ gilt. Auf Grund des Satzes (1. 2. 9.) können wir folgendes kommutative Diagramm bilden :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & f(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi} & f(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\eta} & \mathfrak{g} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \lambda(\varphi) & & \downarrow \lambda(\varphi') & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & f(\mathfrak{Y}) & \xrightarrow{\varphi'} & f(\mathfrak{Y}) & \xrightarrow{\eta'} & \mathfrak{Y} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Mittels der Homologiesequenzen nach Axiom (4) erhalten wir :



Nach Induktionsvoraussetzung ist das äußere Rechteck kommutativ. In den Randrechtecken herrscht Kommutativität auf Grund der angedeuteten Bedingungen (Axiom (3), Diagramm (D)!) . Zu zeigen ist die Kommutativität in der Mitte. Diese kann man direkt errechnen. Es sei ein Element $f \in H_{q+1}(P, \underline{g})$ vorgegeben. Unter Benützung der Kommutativitätseigenschaften ergibt sich : $\tilde{\partial}_{q+1} \cdot \tilde{y}_{q+1} \cdot h_{q+1}(f) = \underline{\lambda(\underline{y})}_q \cdot \tilde{\partial}_{q+1} \cdot h_{q+1}(f) = \underline{\widetilde{\lambda(\underline{y})}}_q \cdot h_q \cdot \partial_{q+1}(f)$, weiter nach Induktionsvoraussetzung $= h_q \cdot \underline{\lambda(\underline{y})}_q \cdot \partial_{q+1}(f) = h_q \cdot \partial_{q+1} \cdot \underline{y}_{q+1}(f) = \tilde{\partial}_{q+1} \cdot h_{q+1} \cdot \underline{y}_{q+1}(f)$. Da $\tilde{\partial}_{q+1}$ 1-1-deutig ist, folgt $\tilde{y}_{q+1} \cdot h_{q+1}(f) = h_{q+1} \cdot \underline{y}_{q+1}(f)$.

(II) Diese Eigenschaft kann unmittelbar nachgerechnet werden. Es sei eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow \underline{g}' \xrightarrow{\underline{y}} \underline{g} \xrightarrow{\underline{y}} \underline{g}'' \longrightarrow 0$ von inversen Gruppenfamilien vorgegeben : Nach dem Satz (1. 2. 9.) haben wir folgendes kommutative Diagramm :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \tau & & \uparrow \eta & & \uparrow \text{id.} \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{L} & \xrightarrow{\mu} & f(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\nu} & \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \omega & & \downarrow \lambda(\psi) & & \downarrow \text{id.} \\
 0 & \longrightarrow & f(\mathfrak{g}') & \xrightarrow{s''} & f(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\eta''} & \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Mit dieser Aufspaltung bilden wir das Diagramm :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_q(P, f(\mathfrak{g}'')) & \xleftarrow{\omega_q} & H_q(P, \mathfrak{L}) & & \\
 \downarrow h_q & \nearrow \partial_{q+1}'' & \downarrow \partial_{q+1}' & \searrow \tau_q & \\
 & H_{q+1}(P, \mathfrak{g}'') & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & H_q(P, \mathfrak{g}') & \\
 \downarrow h_q & \downarrow h_{q+1} & \downarrow h_q & \downarrow h_q & \\
 \tilde{H}_{q+1}(P, \mathfrak{g}'') & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q+1}} & \tilde{H}_q(P, \mathfrak{g}') & & \\
 \downarrow \tilde{\partial}_{q+1}'' & \nearrow \tilde{\partial}_{q+1}' & \downarrow \tilde{\partial}_{q+1} & \searrow \tilde{\tau}_q & \\
 \tilde{H}_q(P, f(\mathfrak{g}')) & \xleftarrow{\tilde{\omega}_q} & \tilde{H}_q(P, \mathfrak{L}) & &
 \end{array}$$

(D.) (I) (3) (I) (3)

In den mit (3) (I) und (D) bezeichneten Teilstücken herrscht Kommutativität auf Grund der damit angedeuteten Eigenschaften (Axiom (3), bewiesene Eigenschaft (I), Diagramm (D) !). Zu zeigen ist die Kommutativitätsbedingung im inneren Rechteck.

Wir beginnen mit folgender Bemerkung : Es sei ein Element $f \in H_{q+1}(P, \mathfrak{g}'')$ gegeben, dann existiert ein Element $g \in \tilde{H}_{q+1}(P, \mathfrak{g}'')$ mit $\tilde{\mathcal{D}}'_{q+1}(g) = h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f)$. Beweis : In beiden Homologietheorien betrachten wir folgendes Teilstück der nach dem Axiom (4) zu der exakten Sequenz $0 \longrightarrow \mathfrak{L} \xrightarrow{\mu} f(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\nu} \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0$ gehörigen Homologiesequenz :

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(P, f(\mathfrak{g})) & \xleftarrow{\mu_q} & H_q(P, \mathfrak{L}) & \xleftarrow{\mathcal{D}'_{q+1}} & H_{q+1}(P, \mathfrak{g}'') & \xleftarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow h_q & & \downarrow h_q & & & & \\ \tilde{H}_q(P, f(\mathfrak{g})) & \xleftarrow{\tilde{\mu}_q} & \tilde{H}_q(P, \mathfrak{L}) & \xleftarrow{\tilde{\mathcal{D}}'_{q+1}} & \tilde{H}_{q+1}(P, \mathfrak{g}'') & \xleftarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

Nach der bereits bewiesenen Bedingung (I) ist das gezeichnete Rechteck kommutativ. Für das Element $f \in H_{q+1}(P, \mathfrak{g}'')$ gilt wegen der Exaktheit in der ersten Zeile $\tilde{\mu}_q \cdot h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f) = h_q (\mu_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f)) = 0$.

Auf Grund der Exaktheit der zweiten Zeile existiert ein Element $g \in H_{q+1}(P, \mathfrak{g}'')$ mit $\tilde{\mathcal{D}}'_{q+1}(g) = h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f)$.

Jetzt kann die Kommutativität direkt errechnet werden : Es sei also ein Element $f \in H_{q+1}(P, \mathfrak{g}'')$ vorgegeben. Nach der vorangegangenen Bemerkung gibt es ein Element $g \in \tilde{H}_{q+1}(P, \mathfrak{g}'')$ mit $\tilde{\mathcal{D}}'_{q+1}(g) =$

$h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f)$. Unter Benützung der Kommutativitäten im Diagramm folgt :
 $\tilde{\mathcal{D}}'_{q+1}(h_{q+1}(f) - g) = \tilde{\mathcal{D}}'_{q+1} h_{q+1}(f) - \tilde{\mathcal{D}}'_{q+1}(g) = h_q \cdot \mathcal{D}''_{q+1}(f) - \tilde{\omega}_q \cdot \tilde{\mathcal{D}}'_{q+1}(g)$
 $= h_q \cdot \omega_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f) - \tilde{\omega}_q \cdot h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f)$ und weiter bei Beachtung der Bedingung (I) $= \tilde{\omega}_q \cdot h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f) - \tilde{\omega}_q \cdot h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f) = 0$. Nach den Axiomen (4) und (5) ist $\mathcal{D}''_{q+1}$ ein 1-1-deutiger Homomorphismus. Daher ergibt sich $h_{q+1}(f) = g$. Damit errechnet man unmittelbar :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}'_{q+1} \cdot h_{q+1}(f) &= \tilde{\tau}_q \cdot \tilde{\mathcal{D}}'_{q+1} \cdot h_{q+1}(f) = \tilde{\tau}_q \cdot \tilde{\mathcal{D}}'_{q+1}(g) = \tilde{\tau}_q \cdot h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f) \\ &= h_q \cdot \tau_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f) = h_q \cdot \mathcal{D}'_{q+1}(f). \end{aligned}$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

KOROLLAR (3.3.) Sind zwei Homologietheorien $H(\mathfrak{J}(P))$ und $\tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ über der Klasse $\mathfrak{J}(P)$ der inversen Gruppenfamilien über einem parakompakten Raum P im nulldimensionalen Teil isomorph (d. h. gibt es einen Isomorphismus $[\eta]_0 : H_0(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathfrak{J}(P))$!) dann sind die beiden Homologietheorien isomorph.

BEWEIS Zu dem nulldimensionalen Isomorphismus $[\eta]_0 : H_0(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}_0(\mathfrak{J}(P))$ existiert nach dem letzten Satz (3.2.) ein Homomorphismus $[i] : H(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ mit dem Isomorphismus $[\eta]_0$ als Basis. Ebenso gibt es einen Homomorphismus $[j] : H(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$ mit dem Isomorphismus $[\eta]_0$ als Basis. Die Zusammensetzung von $[i]$ und $[j]$ definiert Homomorphismen (Eigenschaften (I) und (II) der Definition sind erfüllt !) der beiden Homologietheorien in sich :

$$[i \cdot j] : \tilde{H}(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow \tilde{H}(\mathfrak{J}(P))$$

$$[j \cdot i] : H(\mathfrak{J}(P)) \longrightarrow H(\mathfrak{J}(P))$$

wobei die Basis der Homomorphismen jeweils die Identität ist. Nach dem Eindeutigkeitssatz (3.2.) sind aber dann die Homomorphismen $[i \cdot j]$ und $[j \cdot i]$ die Identitäten. Dies ergibt , daß die Homomorphismen $[i]$ und $[j]$ Isomorphismen sind.

ANMERKUNG Es ist nicht nötig, die Homologietheorie auf einen festen Raum mit den darüber erklärten inversen Gruppenfamilien und deren Homomorphismen zu beschränken. Man kann sie leicht über die stetigen Abbildungen $\Phi : P \longrightarrow Q$ der parakompakten Räume und den dadurch definierten Homomorphismen zwischen inversen Gruppenfamilien über beiden Räumen erweitern.

Dazu ist nur der Begriff des Homomorphismus zweier inversen Gruppenfamilien zu verallgemeinern. $\Phi: X \longrightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung der beiden topologischen Räume X und Y , $\mathcal{G}_X = \{G_U, \pi_V^U\}$ und $\mathcal{G}_Y = \{H_U, \mu_{V'}^U\}$ seien inverse Gruppenfamilien über den Räumen X , bzw. Y . Ein Φ -Homomorphismus $\varphi_\Phi: \mathcal{G}_X \longrightarrow \mathcal{G}_Y$ ist eine Menge von Homomorphismen $\{\varphi_{U'}: G_{\Phi^{-1}(U')} \longrightarrow H_{U'}\}$, wobei U' die offenen Mengen des Raumes Y durchläuft derart, daß für $U' \subseteq V'$ die Kommutativitätsbedingung $\varphi_{V'} \cdot \pi_{\Phi^{-1}(V')}^{\Phi^{-1}(U')} = \mu_{V'}^{U'} \cdot \varphi_{U'}$ erfüllt ist.

In der klassischen Homologietheorie spielen folgende Φ -Homomorphismen eine wesentliche Rolle: X und Y seien zwei topologische Räume, A eine abgeschlossene Teilmenge von X , B eine abgeschlossene Teilmenge von Y , $\Phi: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung mit $\Phi(A) \subseteq B$, G sei eine feste abelsche Gruppe. Für beide Räume bilden wir nach dem Beispiel des §1 die inversen Gruppenfamilien $G(A)_X$, $G(X, A)_X$, G_X , $G(B)_Y$, $G(Y, B)_Y$, G_Y . Man hat dann folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G(A)_X & \xrightarrow{i} & G_X & \xrightarrow{i} & G(X, A)_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi'_\Phi & & \downarrow \varphi_\Phi & & \downarrow \varphi''_\Phi \\ 0 & \longrightarrow & G(B)_Y & \xrightarrow{i} & G_Y & \xrightarrow{i} & G(Y, B)_Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

wobei die Homomorphismen φ_Φ , φ'_Φ , φ''_Φ in passender Weise durch Identitäten bzw. Nullhomomorphismen zu erklären sind (Fallunterscheidungen).

Man kann nun ein umfassenderes Axiomensystem (parallel zu dem von Eilenberg-Steenrod [1]) angeben, das auch die stetigen Abbildungen von parakompakten Räumen einbezieht. Man erhält, daß auch diese erweiterte Theorie bereits rekursiv aus der nulldimensionalen Theorie entwickelt werden kann. Entscheidend hierbei ist, daß man zu jedem

Φ -Homomorphismus $\varphi_{\Phi} : \mathfrak{g}_{\Phi} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\Phi}$ folgendes kommutative Diagramm bilden kann :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{f}(\mathfrak{g})_{\Phi} & \longrightarrow & \mathfrak{f}(\mathfrak{g})_{\Phi} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\Phi} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \lambda(\varphi)_{\Phi} & & \downarrow \lambda(\varphi)_{\Phi} & & \downarrow \varphi_{\Phi} \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{f}(\mathfrak{g})_{\Phi} & \longrightarrow & \mathfrak{f}(\mathfrak{g})_{\Phi} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\Phi} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

wobei die Zeilen kanonisch freie Sequenzen nach dem Satz (1.2.8.) sind.

Der Homomorphismus $\lambda(\varphi)_{\Phi}$ ist dabei folgendermaßen erklärt :

Für $\lambda(\varphi)_{\Phi} : F(\mathfrak{g})_{\Phi^{-1}(\Phi)} \longrightarrow F(\mathfrak{h})_{\Phi}$, $\Phi \neq \mathbb{A}$ wird folgende

Konstruktion durchgeführt : Es sei $f \in F(\mathfrak{g})_{\Phi^{-1}(\Phi)}$ vorgegeben, dann

sei : $(\lambda(\varphi)_{\Phi}(f))(q) = \varphi_{\Phi}(\sum_{p \in \Phi^{-1}(q)} f(p))$. (Hieran erkennt man

eindringlich wie "passend" die spezielle Form der freien Auflösung konstruiert ist). Die erforderlichen Kommutativitäten rechnet man ohne weiteres nach, ($\lambda(\varphi)_{\Phi}$ ist an dem Satz (1.2.5.) anschließend erklärt !).

Die Darstellung für diese umfassendere Theorie würde noch mehr Aufwand an Diagrammen erfordern. Ich habe mich daher auf die einfache Form beschränkt.

§ 4. KONSTRUKTION EINER VERALLGEMEINERTEN ČECHSCHEN HOMOLOGIETHEORIE.

Die Konstruktion erfolgt über eine Reihe von Definitionen und Lemmata. Im wesentlichen wird der klassische Čechsche Konstruktionsprozeß wiedergegeben.

(4.1.) X sei ein topologischer Raum, $\mathfrak{g}_X = \{G_U, \pi_V^U\}$ eine inverse Gruppenfamilie über X . (Wir schreiben im folgenden wieder statt $\mathfrak{g}_X$ nur noch das Symbol $\mathfrak{g}$). Wir betrachten alle Überdeckungen von X . Für eine feste Überdeckung $\alpha = \{U_i\}_{i \in I_\alpha}$ und für jede ganze Zahl $q \geq 0$ sei die q -dimensionale Kettengruppe $C_q(X_\alpha, \mathfrak{g})$ der Überdeckung α die direkte Summe der Gruppen $G_{U_{i_0}} \wedge \dots \wedge U_{i_q}$:

$$C_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) = \sum_{(i_0, \dots, i_q)} G_{U_{i_0}} \wedge \dots \wedge U_{i_q}$$

Wir schreiben die Elemente $c \in C_q(X_\alpha, \mathfrak{g})$ in der Form $c = \sum_{(i_0, \dots, i_q)} g(i_0, \dots, i_q)$, wobei die Summe nur aus endlich

vielen von Null verschiedenen Elementen besteht und

$g(i_0, \dots, i_q) \in G_{U_{i_0}} \wedge \dots \wedge U_{i_q}$ ist ($(i_0, \dots, i_q)$ bezeichnet die Zuge-

hörigkeit zur Gruppe $G_{U_{i_0}} \wedge \dots \wedge U_{i_q}$ - im folgenden zu beachten!).

Die Konstruktion werde für alle ganzen Zahlen $q \geq 0$ durchgeführt, für die ganzen Zahlen $q < 0$ werde $C_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$ gesetzt.

Für die Gruppe $C_q(X_\alpha, \mathfrak{g})$ definieren wir einen Homomorphismus - den Randoperator - $\partial_q^*: C_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) \longrightarrow C_{q-1}(X_\alpha, \mathfrak{g})$ in üblicher Weise: Für eine Kette $c \in C_q(X_\alpha, \mathfrak{g})$ sei

$$\partial_q^*(g(i_0, \dots, i_q)) = \sum_{k=0}^q (-1)^k (\pi_{W_k}^W g)(i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q)$$

für einen einzelnen Summanden gesetzt. (Das Zeichen $\wedge$ auf einem Buchstaben bedeute das Fortlassen des betreffenden Buchstabens).

Hierbei ist $W = U_{i_0} \wedge \dots \wedge U_{i_q}$ und $W_k = U_{i_0} \wedge \dots \wedge \hat{U}_{i_k} \wedge \dots \wedge U_{i_q}$

Für die so definierten Randoperatoren ∂_q^* verifiziert man in bekannter Weise die Beziehung $\partial_{q-1}^* \cdot \partial_q^* = 0$.

Mittels der Homomorphismen ∂_q^* werden die Čechschen Homologiegruppen der Überdeckung α erklärt. Es sei

$$Z_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) = \{c, c \in C_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) \text{ mit } \partial_q^*(c) = 0\}$$

die Gruppe der q -dimensionalen Zyklen,

$$B_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) = \{b, b = \partial_{q+1}^*(c) \text{ mit } c \in C_{q+1}(X_\alpha, \mathfrak{g})\}$$

die Gruppe der q -dimensionalen Ränder. Wegen der Beziehung

$\partial_{q-1}^* \cdot \partial_q^* = 0$ ist die Gruppe $B_q(X_\alpha, \mathfrak{g})$ in der Gruppe $Z_q(X_\alpha, \mathfrak{g})$ enthalten. Die q -dimensionale Čechsche Homologiegruppe der Überdeckung α sei folgende Faktorgruppe:

$$H_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) = Z_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) / B_q(X_\alpha, \mathfrak{g})$$

Nun sei $\beta = \{V_j\}_{j \in I_\beta}$ eine Verfeinerung der Überdeckung $\alpha = \{U_i\}_{i \in I_\alpha}$ (in Zeichen $\alpha < \beta$). Nach Definition der Verfeinerung existiert eine Abbildung $t: I_\beta \longrightarrow I_\alpha$ mit $V_j \subseteq U_{t(j)}$.

t definiert einen Homomorphismus $t_{\alpha q}^{\beta} : C_q(X_{\beta}, \mathcal{G}) \longrightarrow C_q(X_{\alpha}, \mathcal{G})$:
Für jeden Summanden einer Kette $c \in C_q(X_{\beta}, \mathcal{G})$ sei

$$t_{\alpha q}^{\beta}(g(j_0, \dots, j_q)) = (\pi_{W_{\alpha}}^{W_{\beta}} g)(t(j_0), \dots, t(j_q))$$

gesetzt, wobei $W_{\alpha} = U_{t(j_0)} \cap \dots \cap U_{t(j_q)}$ und $W_{\beta} = V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_q}$ ist.

Man verifiziert unmittelbar, daß folgendes Diagramm kommutativ ist :

$$\begin{array}{ccc} C_q(X_{\beta}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\partial_q^*} & C_{q-1}(X_{\beta}, \mathcal{G}) \\ \downarrow t_{\alpha q}^{\beta} & & \downarrow t_{\alpha, q-1}^{\beta} \\ C_q(X_{\alpha}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\partial_q^*} & C_{q-1}(X_{\alpha}, \mathcal{G}) \end{array}$$

Folglich kann der Homomorphismus $t_{\alpha q}^{\beta}$ auf die Restklassen der Homologiegruppen übertragen werden und definiert damit einen Homomorphismus - den Verfeinerungshomomorphismus - :

$$\bar{t}_{\alpha q}^{\beta} : H_q(X_{\beta}, \mathcal{G}) \longrightarrow H_q(X_{\alpha}, \mathcal{G}) \quad \text{für } \alpha < \beta.$$

LEMMA (4.1.1.) Der Homomorphismus $\bar{t}_{\alpha q}^{\beta}$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der Abbildung t .

BEWEIS Es seien $t : I_{\beta} \longrightarrow I_{\alpha}$ und $t' : I_{\beta} \longrightarrow I_{\alpha}$ zwei verschiedene Verfeinerungsabbildungen. Für $q \geq 0$ können wir Homotopieoperatoren $T_q : C_q(X_{\beta}, \mathcal{G}) \longrightarrow C_{q+1}(X_{\alpha}, \mathcal{G})$ folgendermaßen angeben : Es sei eine Kette $c \in C_q(X_{\beta}, \mathcal{G})$ vorgegeben, für einen Summanden der Kette werde gesetzt :

$$T_q(g(j_0, \dots, j_q)) = \sum_{l=0}^q (-1)^l (\pi_{W_{\alpha, l}}^{W_{\beta}} g)(t(j_0), \dots, t(j_l), t'(j_l), \dots, t'(j_q))$$

wobei $W_{\beta} = V_{j_0} \cap \dots \cap V_{j_q}$ und $W_{\alpha, l} = U_{t(j_0)} \cap \dots \cap U_{t(j_l)} \cap U_{t'(j_l)} \cap \dots \cap U_{t'(j_q)}$

ist (t_{-1} sei der Nullhomomorphismus). Man kann dann folgende Be-

ziehung nachrechnen :

$$\partial_{q+1}^* T_q + T_{q-1} \cdot \partial_q^* = t_{\alpha q}^{\beta} - t_{\alpha q}^{\beta}$$

für alle ganzen Zahlen $q \geq 0$. Wenn man dieses Resultat auf die Homologiegruppen anwendet, folgt unmittelbar die Behauptung $\bar{t}_{\alpha q}^{\beta} = \bar{t}_{\alpha q}^{\beta}$.

LEMMA (4.1.2.) Für die Überdeckungen α, β, γ mit $\alpha < \beta < \gamma$ gilt $\bar{t}_{\alpha q}^{\gamma} = \bar{t}_{\alpha q}^{\beta} \cdot \bar{t}_{\beta q}^{\gamma}$ für die entsprechenden Verfeinerungshomomorphismen.

BEWEIS Es seien $\alpha = \{U_i\}_{i \in I_\alpha}$, $\beta = \{V_j\}_{j \in I_\beta}$ und $\gamma = \{W_k\}_{k \in I_\gamma}$ Überdeckungen mit zugehörigen Verfeinerungsabbildungen $t' : I_\gamma \rightarrow I_\beta$ und $t'' : I_\beta \rightarrow I_\alpha$. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung $(t'' \cdot t') : I_\gamma \rightarrow I_\alpha$ eine Verfeinerungsabbildung. Für diese spezielle Verfeinerungsabbildung gilt $(t'' \cdot t')_{\alpha q}^{\gamma} = (t''_{\alpha q}^{\beta}) \cdot (t'_{\beta q}^{\gamma})$. Nach dem vorangegangenen Lemma folgt hieraus die Behauptung $\bar{t}_{\alpha q}^{\gamma} = \bar{t}_{\alpha q}^{\beta} \cdot \bar{t}_{\beta q}^{\gamma}$.

Nach diesen Vorbereitungen kann die Definition der Čechschen Homologiegruppen gegeben werden :

DEFINITION (4.1.3.) Die q -dimensionale Čechsche Homologiegruppe $H_q(X, \mathcal{G})$ der inversen Gruppenfamilie $\mathcal{G}$ über dem topologischen Raum X sei der inverse Limes des Systems $\{H_q(X_\alpha, \mathcal{G}), \bar{t}_{\alpha q}^{\beta}\}$ für alle ganzen Zahlen $q \geq 0$.

(Es ist also speziell $H_q(X, \mathcal{G}) = 0$ für $q < 0$)

(4.2.) Als nächstes konstruieren wir den zu einem Homomorphismus $\psi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{y}$ zweier inverser Gruppenfamilien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{y}$ gehörigen Homomorphismus der Homologiegruppen. Es sei $\alpha = \{U_i\}_{i \in I_\alpha}$ eine beliebige Überdeckung von X . Durch den Homomorphismus ψ wird folgender Homomorphismus der q -dimensionalen Kettengruppen der Überdeckung α definiert:

$$\psi_q^\alpha: C_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) \longrightarrow C_q(X_\alpha, \mathfrak{y})$$

ist für $c \in C_q(X_\alpha, \mathfrak{g})$ gegeben durch

$$\psi_q^\alpha(g(j_0, \dots, j_q)) = \psi_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_q}}(g(j_0, \dots, j_q))$$

für jeden einzelnen Summanden von c (wobei also $g(j_0, \dots, j_q) \in G_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_q}}$ und $\psi_q^\alpha(g(j_0, \dots, j_q)) \in H_{U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_q}}!$).

Auf Grund der Kommutativitätsbedingung bei der Definition des Homomorphismus ψ ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} C_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\partial_q^*} & C_{q-1}(X_\alpha, \mathfrak{g}) \\ \downarrow \psi_q^\alpha & & \downarrow \psi_{q-1}^\alpha \\ C_q(X_\alpha, \mathfrak{y}) & \xrightarrow{\partial_q^*} & C_{q-1}(X_\alpha, \mathfrak{y}) \end{array}$$

Daher definiert der Homomorphismus ψ_q^α auch für die Restklassen der Homologiegruppen der Überdeckung α einen Homomorphismus

$$\bar{\psi}_q^\alpha: H_q(X_\alpha, \mathfrak{g}) \longrightarrow H_q(X_\alpha, \mathfrak{y}).$$

Ebenfalls auf Grund der Kommutativitätsbedingung des Homomorphismus $\mathcal{Y}$ hat man beim Übergang zu einer feineren Überdeckung ein kommutatives Diagramm :

$$\begin{array}{ccc}
 C_q(X_\alpha, \mathcal{G}) & \xleftarrow{t_{\alpha, q}^\beta} & C_q(X_\beta, \mathcal{G}) \\
 \downarrow \mathcal{Y}_q^\alpha & & \downarrow \mathcal{Y}_q^\beta \\
 C_q(X_\alpha, \mathcal{Y}) & \xleftarrow{t_{\alpha, q}^\beta} & C_q(X_\beta, \mathcal{Y})
 \end{array}
 \quad \text{wobei } \alpha < \beta$$

Somit ist auch das Diagramm der Homologiegruppen kommutativ :

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(X_\alpha, \mathcal{G}) & \xleftarrow{\bar{t}_{\alpha, q}^\beta} & H_q(X_\beta, \mathcal{G}) \\
 \downarrow \bar{\mathcal{Y}}_q^\alpha & & \downarrow \bar{\mathcal{Y}}_q^\beta \\
 H_q(X_\alpha, \mathcal{Y}) & \xleftarrow{\bar{t}_{\alpha, q}^\beta} & H_q(X_\beta, \mathcal{Y})
 \end{array}$$

und deshalb folgende Definition möglich :

DEFINITION (4.2.1.) Der q -dimensionale Homomorphismus

$$\mathcal{Y}_q : H_q(X, \mathcal{G}) \longrightarrow H_q(X, \mathcal{Y})$$

der Čechschen Homologiegruppen $H_q(X, \mathcal{G})$ und $H_q(X, \mathcal{Y})$ ist der inverse Limes der Homomorphismenmenge $\{\bar{\mathcal{Y}}_q^\alpha\}$, wobei α die Überdeckungen von X durchläuft.

(Anmerkung : Allgemeiner kann man zu jedem Φ -Homomorphismus $\mathcal{Y}_\Phi : \mathcal{G}_X \longrightarrow \mathcal{Y}_Y$, wobei $\Phi : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung ist, einen Homomorphismus $\mathcal{Y}_{\Phi q} : H_q(X, \mathcal{G}_X) \longrightarrow H_q(Y, \mathcal{Y}_Y)$ nach dem gleichen Prinzip konstruieren)

definierten Homologiegruppen und Homomorphismen erfüllt werden.

SATZ (4.4.1.) $\varphi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Y}$ und $\psi: \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ seien zwei Homomorphismen der inversen Gruppenfamilien $\mathcal{G}$, $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}$ über dem topologischen Raum X . Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{(\psi \cdot \varphi)_q} & H_q(X, \mathcal{Z}) \\ & \searrow \varphi_q & \nearrow \psi_q \\ & H_q(X, \mathcal{Y}) & \end{array}$$

BEWEIS α sei eine beliebige Überdeckung von X . Auf Grund der Čechschen Konstruktion ist das Diagramm der Überdeckung α kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_\alpha, \mathcal{G}) & \xrightarrow{(\overline{\psi \cdot \varphi})_q^\alpha} & H_q(X_\alpha, \mathcal{Z}) \\ & \searrow \overline{\varphi}_q^\alpha & \nearrow \overline{\psi}_q^\alpha \\ & H_q(X_\alpha, \mathcal{Y}) & \end{array}$$

Durch Übergang zum inversen Limes ergibt sich die Behauptung:

(Anmerkung: Es gilt allgemeiner, daß wenn $\Phi: X \longrightarrow Y$ und $\Psi: Y \longrightarrow Z$ stetige Abbildungen sind, $\varphi_\Phi: \mathcal{G}_X \longrightarrow \mathcal{Y}_Y$ und $\varphi_\Psi: \mathcal{Y}_Y \longrightarrow \mathcal{Z}_Z$ Φ -bzw. Ψ -Homomorphismen, dann ist $\varphi_\Psi \cdot \varphi_\Phi$ ein $\Psi \cdot \Phi$ -Homomorphismus und es gilt entsprechend $(\varphi_\Psi \cdot \varphi_\Phi)_q = \varphi_{\Psi \cdot \Phi, q}$ für alle q).

SATZ (4.4.2.) Zu einem kommutativen Diagramm von inversen Gruppenfamilien mit exakten Zeilen :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{s} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\eta} & \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{s'} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\eta'} & \mathfrak{g}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

ist das zugehörige Diagramm der Randhomomorphismen kommutativ :

$$\begin{array}{ccc} H_{q+1}(X, \mathfrak{g}'') & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & H_q(X, \mathfrak{g}') \\ \downarrow \varphi''_{q+1} & & \downarrow \varphi'_q \\ H_{q+1}(X, \mathfrak{g}) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & H_q(X, \mathfrak{g}) \end{array}$$

BEWEIS Für jede Überdeckung α ist die entsprechende Kommutativitätsbedingung erfüllt .

(Anmerkung : Auch diese Aussage kann man verallgemeinern . Es sei $\Phi : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und weiter sei ein kommutatives Diagramm von Φ -Homomorphismen mit exakten Zeilen gegeben :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}'_X & \longrightarrow & \mathfrak{g}_X & \longrightarrow & \mathfrak{g}''_X \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi'_\Phi & & \downarrow \varphi_\Phi & & \downarrow \varphi''_\Phi \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{g}'_Y & \longrightarrow & \mathfrak{g}_Y & \longrightarrow & \mathfrak{g}''_Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dann gilt dem obigen entsprechend $\varphi'_\Phi \cdot \partial_{q+1} = \partial_{q+1} \cdot \varphi''_\Phi$).

Der dem Axiom (1) entsprechende Satz ist evident.

(4.5.) Jetzt kommen wir zu den entscheidenden Sätzen, die den Axiomen (4) und (5) entsprechen und die sich auf parakompakte Räume beziehen.

SATZ (4.5.1.) P sei ein parakompakter Raum, $\mathcal{F}_P = \{F_U, \subseteq_U^U\}$ eine feine inverse Gruppenfamilie. α sei eine beliebige Überdeckung von P , $\{\beta, \beta', L, \gamma\}$ ein feines System bzgl. der Überdeckung α . Dann existiert zu jeder ganzen Zahl $q \geq 0$ ein Homomorphismus (Homotopieoperator)

$$T_q : C_q(P, \gamma, \mathcal{F}) \longrightarrow C_{q+1}(P, \beta, \mathcal{F})$$

mit der Eigenschaft:

$$\partial_{q+1}^* \cdot T_q + T_{q-1} \cdot \partial_q^* = t_{\beta q}^{\gamma}$$

für alle ganzen Zahlen $q \geq 1$, wobei $t_{\beta q}^{\gamma}$ ein Verfeinerungshomomorphismus ist.

BEWEIS Nach Definition erfüllt das feine System $\beta = \{V_i\}_{i \in I_\beta}$, $\beta' = \{V_i'\}_{i \in I_\beta}$, $L = \{l_i\}_{i \in I_\beta}$ und $\gamma = \{W_j\}_{j \in I_\gamma}$ folgende Bedingungen:

- 1) Für jedes j ist $W_j \cap V_i \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele i .
- 2) Falls $W_j \cap V_i' \neq \emptyset$ ist, so gilt $W_j \subseteq V_i$.

Und für alle offenen Mengen U aus P mit $U \subseteq W_j$ (wobei W_j eine beliebige offene Menge der Überdeckung γ ist) hat man:

- 1) $l_U^i(F_U) = 0$ wenn $U \subseteq cV_i'$
- 2) $\sum_i l_U^i$ ist die Identität auf F_U .

Wir betrachten eine Verfeinerungsabbildung $t : I_\gamma \longrightarrow I_\beta$ mit $W_j \subseteq V_{t(j)}$. Durch diese ist ein Verfeinerungshomomorphismus

$t_{\beta q}^{\gamma} : C_q(P, \gamma, \mathcal{F}) \longrightarrow C_q(P, \beta, \mathcal{F})$ definiert: Für einen Summanden einer Kette $c \in C_q(P, \gamma, \mathcal{F})$ ist $t_{\beta q}^{\gamma}(g(j_0, \dots, j_q)) = (\pi_{V_{t(j_0)}}^{W_{j_0}} g)(t(j_0), \dots, t(j_q))$

wobei $V_{t(j_0)} = V_{t(j_0)} \cap \dots \cap V_{t(j_q)}$ und $W_\gamma = W_{j_0} \cap \dots \cap W_{j_q}$ ist.

Als Vorbereitung für die Definition des Homotopieoperators T_q werden alle $q+1$ - Tupel $(j_0, \dots, j_q)$ betrachtet. Für jedes einzelne $q+1$ - Tupel $(j_0, \dots, j_q)$ wird folgende Konstruktion durchgeführt: Es werden alle Indizes i festgehalten mit $W_{j_0} \cap \dots \cap W_{j_q} \cap V_i' \neq \mathcal{A}$. Wegen der Eigenschaft 1) und 2) gibt es höchstens endlich viele solcher Indizes i . Weiter gilt dann: $W_{j_s} \cap V_i' \neq \mathcal{A}$ für $s = 0, \dots, q$. Auf Grund der Eigenschaft 2) folgt hieraus $W_{j_s} \subseteq V_i$ für $s = 0, \dots, q$. Somit gilt für diese endlich vielen Indizes i : $W_{j_0} \cap \dots \cap W_{j_q} \subseteq V_i \cap V_{t(j_0)} \cap \dots \cap V_{t(j_q)}$. Ist $W_{j_0} \cap \dots \cap W_{j_q} \neq \mathcal{A}$, dann gibt es mindestens einen solchen Index i , da $\beta' = \{V_i'\}_{i \in I_{\beta}}$ eine Überdeckung ist und deshalb $\bigcup_{i \in I_{\beta}} V_i' = P$ gilt.

Jetzt kann der Homotopieoperator T_q definiert werden: Für eine Kette $c = \sum g(j_0, \dots, j_q)$ aus $C_q(P_X, \mathcal{f})$ sei für jeden einzelnen Summanden $g(j_0, \dots, j_q)$ gesetzt:

$$T_q(g(j_0, \dots, j_q)) = \sum_i (\pi_{R_i}^S \cdot l_S^i g)(i, t(j_0), \dots, t(j_q)),$$

falls $W_{j_0} \cap \dots \cap W_{j_q} \neq \mathcal{A}$ ist. Hierbei durchläuft i obige Indizes, und es ist $R_i = V_i \cap V_{t(j_0)} \cap \dots \cap V_{t(j_q)}$ und $S = W_{j_0} \cap \dots \cap W_{j_q}$.

$$T_q(g(j_0, \dots, j_q)) = 0$$

falls $W_{j_0} \cap \dots \cap W_{j_q} = \mathcal{A}$ gilt. T_q ist ein Homomorphismus.

Im folgenden wird nun die Homotopieeigenschaft nachgewiesen:

(o.B.d.A. sei $W_{j_0} \cap \dots \cap W_{j_q} \neq \mathcal{A}$). Für jedes $q+1$ - Tupel $(j_0, \dots, j_q)$ sind die Indizes i bestimmt, für jedes q - Tupel $(j_0, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_q)$ kommen weitere Indizes $\lambda(k)$ hinzu. Es sei jetzt eine q -dimensionale Kette $c = \sum g(j_0, \dots, j_q) \in C_q(P_X, \mathcal{f})$ vorgegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}^* T_q(g(j_0, \dots, j_q)) &= \sum_{k=0}^q (-1)^{k+1} \sum_i (\pi_{R_{i,k}}^{R_i} \cdot \pi_{R_i}^S \cdot l_S^i g) \\ &(i, t(j_0), \dots, t(\hat{j}_k), \dots, t(j_q)) + \sum_i (\pi_{R_{i,i}}^S \cdot l_S^i g)(t(j_0), \dots, t(j_q)) \end{aligned}$$

wobei $S = W_{j_0} \wedge \dots \wedge W_{j_q}$, $R_i = V_i \wedge V_{t(j_0)} \wedge \dots \wedge V_{t(j_q)}$, $R_0 = R_{ii} = V_{t(j_0)} \wedge \dots \wedge V_{t(j_q)}$ und $R_{i,k} = V_i \wedge V_{t(j_0)} \wedge \dots \wedge V_{t(j_k)} \wedge \dots \wedge V_{t(j_q)}$.

Die Summe formen wir um :

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}^* \cdot T_q(g(j_0, \dots, j_q)) &= \sum_i (\pi_{R_0}^S \cdot l_S^i g)(t(j_0), \dots, t(j_q)) \\ &- \sum_i \sum_{k=0}^q (-1)^k (\pi_{R_{i,k}}^S \cdot l_S^i g)(i, t(j_0), \dots, t(\hat{j}_k), \dots, t(j_q)) \end{aligned}$$

Die erste Summe ergibt :

$$\begin{aligned} \sum_i (\pi_{R_0}^S \cdot l_S^i g)(t(j_0), \dots, t(j_q)) &= (\pi_{R_0}^S (\sum_i l_S^i g)(t(j_0), \dots, t(j_q))) = \\ &= t_{\beta q}^x(g(j_0, \dots, j_q)) \end{aligned}$$

denn nach den Bedingungen für die Homomorphismen l_S^i gilt

$\sum_i l_S^i = \text{Identität}$. Andererseits erhält man :

$$\begin{aligned} T_{q-1} \cdot \partial_q^*(g(j_0, \dots, j_q)) &= T_{q-1} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^q (-1)^k (\pi_{S_k}^S g)(j_0, \dots, \hat{j}_k, \dots, j_q) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^q \sum_i (-1)^k (\pi_{R_{i,k}}^{S_k} \cdot l_{S_k}^i \cdot \pi_{S_k}^S g)(i, t(j_0), \dots, t(\hat{j}_k), \dots, t(j_q)) \\ &+ \sum_{k=0}^q \sum_{\lambda(k)} (-1)^k (\pi_{R_{\lambda,k}}^{S_k} \cdot l_{S_k}^\lambda \cdot \pi_{S_k}^S g)(\lambda, t(j_0), \dots, t(\hat{j}_k), \dots, t(j_q)) \end{aligned}$$

wobei $S_k = W_{j_0} \wedge \dots \wedge \hat{W}_{j_k} \wedge \dots \wedge W_{j_q}$ ist.

Nun gilt auf Grund der Kommutativitätsbedingung bei der Definition von Homomorphismen $l_{S_k}^{i'} \cdot \pi_{S_k}^S = \pi_{S_k}^S \cdot l_S^{i'}$ für $i' \in I_\beta$. Durch ein Einsetzen dieser Vertauschungsvorschriften folgt :

$$T_{q-1} \cdot \mathcal{D}_q^* (g(j_0, \dots, j_q)) = \sum_i \sum_{k=0}^q (-1)^k (\pi_{R_{i,k}}^S \cdot l_S^i g)(i, t(j_0), \dots, t(\hat{j}_k), \dots, t(j_q)) \\ + \sum_{\lambda(k)} \sum_{k=0}^q (-1)^k (\pi_{R_{\lambda,k}}^S \cdot l_S^i g)(\lambda, t(j_0), \dots, t(\hat{j}_k), \dots, t(j_q))$$

Die zweite Summe ergibt aber Null, denn für diese Indizes λ gilt nach Voraussetzung $S = W_{j_0} \wedge \dots \wedge W_{j_q} \subseteq cV^1$ (λ gehört nicht zu den Indizes i !).

Also ist wegen der Bedingung 1) für die Homomorphismen l^i des feinen Systems l_S ein Nullhomomorphismus. Somit :

$$T_{q-1} \cdot \mathcal{D}_q^* (g(j_0, \dots, j_q)) = \sum_i \sum_{k=0}^q (-1)^k (\pi_{R_{i,k}}^S \cdot l_S^i g)(i, t(j_0), \dots, t(\hat{j}_k), \dots, t(j_q))$$

Wir können also zusammenfassen :

$$\mathcal{D}_{q+1}^* T_q (g(j_0, \dots, j_q)) = t_{\beta q}^{\gamma} (g(j_0, \dots, j_q)) - T_{q-1} \cdot \mathcal{D}_q^* (g(j_0, \dots, j_q))$$

Dies ergibt aber gerade die Behauptung :

$$\mathcal{D}_{q+1}^* \cdot T_q + T_{q-1} \cdot \mathcal{D}_q^* = t_{\beta q}^{\gamma} \quad \text{für } q \geq 1$$

SATZ (4.5.2.) P sei ein parakompakter Raum und $\mathcal{f} = \{F_U, \mathcal{G}_V^U\}$ eine feine inverse Gruppenfamilie. Dann gilt $H_q(P, \mathcal{f}) = 0$ für alle ganzen Zahlen $q \geq 1$.

BEWEIS Es sei eine Restklasse $\bar{c} \in H_q(P, \mathcal{f})$ beliebig vorgegeben ($q \geq 1$). Es ist $\pi_\alpha \bar{c} \in H_q(P_\alpha, \mathcal{f})$, wobei π_α die Projektion bedeutet, die nach Definition des inversen Limes zur Überdeckung α gehört. Wir zeigen,

daß $\pi_\alpha \bar{c} = \bar{o}$ ist. Da $\mathcal{f}$ fein ist, existiert zu der Überdeckung α ein feines System $\{\beta, \beta', L, \gamma\}$. Nach dem letzten Satz kann man hierzu Homotopieoperatoren T_q bilden. Auf Grund der Definition des inversen Limes gilt zunächst: $\bar{t}_{\beta q}^\gamma(\pi_\gamma \bar{c}) = \pi_\beta \bar{c}$ und $\bar{t}_{\alpha q}^\beta(\pi_\beta \bar{c}) = \pi_\alpha \bar{c}$. Die Restklasse $\pi_\gamma(\bar{c}) \in H_q(P_\gamma, \mathcal{f})$ werde durch ein Element $d \in Z_q(P_\gamma, \mathcal{f})$ mit $\partial_q^\gamma(d) = 0$ repräsentiert, d.h. also $\bar{d} = \pi_\gamma(\bar{c})$. Wir wenden die Homotopieoperatoren an:

$$\partial_{q+1}^\alpha \cdot T_q(d) + T_{q-1}^\alpha \cdot (\partial_q^\alpha(d)) = \bar{t}_{\beta q}^\delta(d)$$

Somit $\partial_{q+1}^\alpha(T_q(d)) = \bar{t}_{\beta q}^\delta(d)$ und folglich beim Übergang zu den Restklassen $\bar{t}_{\beta q}^\delta(\bar{d}) = \bar{o}$. Dies ergibt aber $\pi_\beta(\bar{c}) = \bar{t}_{\beta q}^\delta(\bar{d}) = \bar{o}$ und daher ist auch $\pi_\alpha(\bar{c}) = \bar{o}$. Weil $\pi_\alpha(\bar{c}) = \bar{o}$ für alle Überdeckungen α gilt, ist $\bar{c} = \bar{o}$, also $H_q(P, \mathcal{f}) = 0$ für $q \geq 1$.

SATZ (4.5.3.) P sei ein parakompakter Raum und $0 \rightarrow \mathcal{g}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{f} \xrightarrow{\psi} \mathcal{g}'' \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von inversen Gruppenfamilien, wobei $\mathcal{f}$ eine feine inverse Gruppenfamilie ist. Dann ist folgende Sequenz von Homologiegruppen exakt:

$$H_0(P, \mathcal{f}) \xleftarrow{\psi_0} H_0(P, \mathcal{g}') \xleftarrow{\partial_1} H_1(P, \mathcal{g}'') \xleftarrow{\psi_1} H_1(P, \mathcal{f}) \xleftarrow{\psi_1} H_1(P, \mathcal{g}') \xleftarrow{\partial_2} \dots$$

BEWEIS Da nach dem letzten Satz $H_q(P, \mathcal{f}) = 0$ für $q \geq 1$ gilt, ist zu zeigen, daß ∂_q für $q \geq 1$ 1-1-deutig ist, ∂_q für $q \geq 2$ ein Homomorphismus auf ist und schließlich daß ∂_1 eine Abbildung auf den Kern von ψ_0 ist.

Für jede Überdeckung α betrachten wir ein feines Überdeckungssystem $\{\beta, \beta', \gamma\}$ und dazu die exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longleftarrow & H_q(P_\alpha, f) & \xleftarrow{\bar{\psi}_q^\alpha} & H_q(P_\alpha, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^\alpha} & H_{q+1}(P_\alpha, g') & \xleftarrow{\bar{\psi}_{q+1}^\alpha} & H_{q+1}(P_\alpha, f) & \longleftarrow \dots \\
 & & \uparrow \bar{\tau}_{\alpha q}^\beta & & \uparrow \bar{\tau}_{\alpha q}^\beta & & \uparrow \bar{\tau}_{\alpha q+1}^\beta & & \uparrow \bar{\tau}_{\alpha q+1}^\beta & \\
 \dots & \longleftarrow & H_q(P_\beta, f) & \xleftarrow{\bar{\psi}_q^\beta} & H_q(P_\beta, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^\beta} & H_{q+1}(P_\beta, g') & \xleftarrow{\bar{\psi}_{q+1}^\beta} & H_{q+1}(P_\beta, f) & \longleftarrow \dots \\
 & & \uparrow \bar{\tau}_{\beta q}^\gamma & & \uparrow \bar{\tau}_{\beta q}^\gamma & & \uparrow \bar{\tau}_{\beta q+1}^\gamma & & \uparrow \bar{\tau}_{\beta q+1}^\gamma & \\
 \dots & \longleftarrow & H_q(P_\gamma, f) & \xleftarrow{\bar{\psi}_q^\gamma} & H_q(P_\gamma, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^\gamma} & H_{q+1}(P_\gamma, g') & \xleftarrow{\bar{\psi}_{q+1}^\gamma} & H_{q+1}(P_\gamma, f) & \longleftarrow \dots
 \end{array}$$

1) Es sei eine Restklasse $\bar{c} \in H_q(P, g')$ gegeben mit $\mathcal{Y}_q(\bar{c}) = \bar{o}$ (wobei $q \geq 0$). Auf Grund der Definition des Homomorphismus $\mathcal{Y}_q$ besagt dies, daß für die Projektion $\bar{\psi}_q^\alpha(\pi_\alpha(\bar{c})) = \bar{o}$ für jede beliebige Überdeckung α gilt. Daher ist auch speziell $\bar{\psi}_q^\gamma(\pi_\gamma(\bar{c})) = \bar{o}$. Da die Homologiesequenz der Überdeckung γ exakt ist, existiert ein Element $\bar{d} \in H_{q+1}(P_\gamma, g')$ mit $\partial_{q+1}^\gamma(\bar{d}) = \pi_\gamma(\bar{c})$. Wir definieren nun:

$$\bar{e}_\alpha = \text{Def. } \bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{d})$$

Es gilt natürlich $\partial_{q+1}^\alpha(\bar{e}_\alpha) = \partial_{q+1}^\alpha \cdot \bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{d}) = \bar{\tau}_{\alpha q}^\gamma \cdot \partial_{q+1}^\gamma(\bar{d}) = \bar{\tau}_{\alpha q}^\gamma(\pi_\gamma(\bar{c})) = \pi_\alpha(\bar{c})$.

1) Wir zeigen: $\bar{e}_\alpha$ ist eindeutig definiert, d.h. unabhängig von der Wahl von $\bar{d}$. Angenommen $\bar{d}, \bar{d}' \in H_{q+1}(P_\gamma, g')$ sind zwei Elemente mit der Eigenschaft $\partial_{q+1}^\gamma(\bar{d}) = \partial_{q+1}^\gamma(\bar{d}') = \pi_\gamma(\bar{c})$. Daraus folgt

$\partial_{q+1}^\gamma(\bar{d} - \bar{d}') = \bar{o}$. Wegen der Exaktheit gibt es ein Element $\bar{f} \in H_{q+1}(P_\gamma, f)$ mit $\bar{\psi}_{q+1}^\gamma(\bar{f}) = \bar{d} - \bar{d}'$. Damit bilden wir:

$$\bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{d} - \bar{d}') = \bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{\psi}_{q+1}^\gamma(\bar{f})) = \bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{\psi}_{q+1}^\gamma \cdot \bar{\tau}_{\beta q+1}^\gamma(\bar{f})) = \bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{\psi}_{q+1}^\gamma \cdot \bar{\tau}_{\beta q+1}^\gamma(\bar{f})).$$

Mit Hilfe des Satzes (4.5.1.) und analog zum Satz (4.5.2.) zeigt man, daß $\bar{\tau}_{\beta q+1}^\gamma(\bar{f}) = \bar{o}$ ist. Somit gilt also $\bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{d} - \bar{d}') = \bar{o}$ und folglich

$$\bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{d}) = \bar{\tau}_{\alpha q+1}^\gamma(\bar{d}').$$

2) Weiterhin gilt für zwei beliebige Überdeckungen α und δ mit $\alpha < \delta$ $\bar{t}_{\alpha q+1}^{\delta}(\bar{e}_{\delta}) = \bar{e}_{\alpha}$. Zu dem feinen System von α gehöre die Verfeinerung $\gamma = \{W_j\}_{j \in I_{\gamma}}$, zu dem feinen System von δ gehöre die Verfeinerung $\gamma' = \{W'_j\}_{j' \in I_{\gamma'}}$. Eine zu γ und γ' gemeinsame Verfeinerung stellt $\gamma'' = \{W_j \cap W'_{j'}\}_{(j, j') \in I_{\gamma} \times I_{\gamma'}}$ dar ($\gamma < \gamma''$ und $\gamma' < \gamma''$.) Damit bilden wir folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 H_q(P_{\gamma''}, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^{\gamma''}} & H_{q+1}(P_{\gamma''}, g'') \\
 \downarrow \bar{t}_{\gamma'' q}^{\gamma''} & & \downarrow \bar{t}_{\gamma'' q+1}^{\gamma''} \\
 H_q(P_{\gamma}, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^{\gamma}} & H_{q+1}(P_{\gamma}, g'') \\
 \downarrow \bar{t}_{\alpha q}^{\gamma} & & \downarrow \bar{t}_{\alpha q+1}^{\gamma} \\
 H_q(P_{\alpha}, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^{\alpha}} & H_{q+1}(P_{\alpha}, g'') \\
 \uparrow \bar{t}_{\alpha q}^{\delta} & & \uparrow \bar{t}_{\alpha q+1}^{\delta} \\
 H_q(P_{\delta}, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^{\delta}} & H_{q+1}(P_{\delta}, g'') \\
 \uparrow \bar{t}_{\delta q}^{\gamma'} & & \uparrow \bar{t}_{\delta q+1}^{\gamma'} \\
 H_q(P_{\gamma'}, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^{\gamma'}} & H_{q+1}(P_{\gamma'}, g'') \\
 \uparrow \bar{t}_{\gamma'' q}^{\gamma'} & & \uparrow \bar{t}_{\gamma'' q+1}^{\gamma'} \\
 H_q(P_{\gamma''}, g') & \xleftarrow{\partial_{q+1}^{\gamma''}} & H_{q+1}(P_{\gamma''}, g'')
 \end{array}$$

Da $\bar{\vartheta}_q(\bar{c}) = \bar{o}$ ist, gilt also auch $\bar{\vartheta}_q^{\gamma}(\pi_{\gamma''}(\bar{c})) = \bar{o}$. Wegen der Exaktheit existiert ein Element $\bar{g} \in H_{q+1}^{\gamma''}(P_{\gamma''}, g'')$ mit $\partial_{q+1}^{\gamma''}(\bar{g}) = \pi_{\gamma''}(\bar{c})$. Man erhält $\bar{t}_{\gamma'' q}^{\gamma''}(\pi_{\gamma''}(\bar{c})) = \pi_{\gamma''}(\bar{c}) = \bar{t}_{\gamma'' q}^{\gamma''}(\partial_{q+1}^{\gamma''}(\bar{g})) = \partial_{q+1}^{\gamma''}(\bar{t}_{\gamma'' q+1}^{\gamma''}(\bar{g}))$, folglich ist $\pi_{\gamma''}(\bar{c}) = \partial_{q+1}^{\gamma''}(\bar{t}_{\gamma'' q+1}^{\gamma''}(\bar{g}))$. Nach 1) hat man also $\bar{e}_{\delta} = \bar{t}_{\delta q+1}^{\gamma'} \cdot (\bar{t}_{\gamma'' q+1}^{\gamma''}(\bar{g})) = \bar{t}_{\delta q+1}^{\gamma''}(\bar{g})$. Analog ergibt sich $\bar{e}_{\alpha} = \bar{t}_{\alpha q+1}^{\gamma''}(\bar{g})$. Auf Grund dieser Darstellung erhalten wir:

$$\bar{e}_{\alpha} = \bar{t}_{\alpha q+1}^{\gamma''}(\bar{g}) = \bar{t}_{\alpha q+1}^{\delta} \bar{t}_{\delta q+1}^{\gamma''}(\bar{g}) = \bar{t}_{\alpha q+1}^{\delta}(\bar{e}_{\delta})$$

Das System $\{\bar{e}_\alpha\}$ definiert also ein Element $\bar{e} \in H_{q+1}(P, \mathcal{G})$ mit $\partial_{q+1}(\bar{e}) = \bar{c}$.

II) ∂_{q+1} ist 1-1-deutig für $q \geq 0$. Es sei $\bar{c} \in H_{q+1}(P, \mathcal{G})$ ein Element mit $\partial_{q+1}(\bar{c}) = \bar{0}$, dies besagt: $\partial_{q+1}^\alpha(\pi_\alpha(\bar{c})) = \bar{0}$ für alle Überdeckungen

α . Zu α wählen wir wiederum ein feines Überdeckungssystem $\{\beta, \beta', \gamma\}$. Es gilt also auch speziell $\partial_{q+1}^\delta(\pi_\gamma(\bar{c})) = \bar{0}$. Wegen der Exaktheit folgt die Existenz eines Elementes $\bar{g} \in H_{q+1}(P_\gamma, \mathcal{G})$ mit $\pi_\gamma(\bar{c}) = \bar{\Psi}_{q+1}^\delta(\bar{g})$. Mittels des Satzes (4.5.1.) folgert man wiederum $\bar{t}_{\beta q+1}^\gamma(\bar{g}) = \bar{0}$. Damit errechnet sich:

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(\bar{c}) &= \bar{t}_{\alpha q+1}^\gamma(\pi_\gamma(\bar{c})) = \bar{t}_{\alpha q+1}^\delta(\bar{\Psi}_{q+1}^\delta(\bar{g})) = \bar{\Psi}_{q+1}^\alpha \cdot \bar{t}_{\alpha q+1}^\delta(\bar{g}) = \\ &= \bar{\Psi}_{q+1}^\alpha \bar{t}_{\alpha q+1}^\beta(\bar{t}_{\beta q+1}^\gamma(\bar{g})) = \bar{0}. \end{aligned}$$

Also ist $\pi_\alpha(\bar{c}) = \bar{0}$ für alle Überdeckungen α , d.h. $\bar{c} = \bar{0}$.

Damit ist die Existenz einer Homomogietheorie für die inversen Gruppenfamilien über einem parakompakten Raum gezeigt. Insbesondere enthält diese Homomogietheorie die klassische Čechsche Theorie (Vergleiche das Beispiel des § 1!).

ANMERKUNG Der Satz (4.5.1.) und damit alle Ausführungen dieser Arbeit, in die wesentlich die Eigenschaft "parakompakt" eingeht, können auch auf Räume mit "parakompaktifizierenden Teilmengen" übertragen werden (Vergleiche für die Terminologie mit [5]). Es ist klar, wie die entsprechenden Beweise zu modifizieren sind.

Mit den Ergebnissen dieser Arbeit wurde im gewissen Sinn ein Gegenstück zu der Cohomologietheorie der Garben über parakompakten Räumen entwickelt. Es sind jedoch nicht alle Methoden dieser Theorie unmittelbar auf unsere verallgemeinerte Homologietheorie übertragbar, insbesondere stößt man auf Schwierigkeiten, Homologietheorien über Auflösungen zu konstruieren. Das liegt vor allem daran, daß für den inversen Limes von exakten Sequenzen im allgemeinen die Exaktheit nicht mehr erhalten bleibt. Nur im Spezialfall des Satzes (4.5.3.) - durch das Axiom (4) der Homologietheorie ausgedrückt - konnte die Exaktheit im inversen Limes beibehalten werden, was für ein Aufbauprinzip der Homologiegruppen und damit für eine Axiomatik gerade ausreicht.

Es wäre noch zu bemerken, daß sich alle Konstruktionen und Ergebnisse, insbesondere die Sätze aus dem Abschnitt (4.5.) auch für Garbendaten dualisieren lassen. Man kann also in der Cohomologietheorie mit den Garbendaten allein ohne Übergang zu den Garben operieren.

LITERATURVERZEICHNIS

Ich gebe nur die unmittelbar benutzten Publikationen an. Für weitere Literaturangaben sei auf die Literaturverzeichnisse der zahlreichen einschlägigen Veröffentlichungen verwiesen !

- [1] S. Eilenberg - N. E. Steenrod , Foundations of Algebraic Topology.
Princeton University Press 1952.
- [2] H. Cartan - S. Eilenberg , Homological Algebra.
Princeton University Press 1956.
- [3] F. Hirzebruch , Neue topologische Methoden in der algebraischen
Geometrie . Springer-Verlag Heidelberg 1954.
- [4] G. Nöbeling , Grundlagen der analytischen Topologie,
Springer-Verlag Heidelberg 1954.
- [5] Seminaire Henri Cartan , 1950/51 , Cohomologie des groupes ,
suite spectrale, faisceaux, Secretariat mathématique , Paris 1955.
- [6] Seminaire Henri Cartan, 1948/49 , Topologie algébrique.
Secretariat mathématique , Paris 1955.

Lebenslauf

Ich, Erhard Walter Luft, wurde am 28.9.1933 in Altwalddorf, einem Dorfe in der ehemals deutschen Zips in der Slowakei, als erstes Kind meiner Eltern Ernst und Elisabeth Luft geboren. Mein Vater war in diesem Ort als Volksschullehrer angestellt. 1939 übersiedelte die Familie nach Ronsperg im Böhmerwald. Dort trat ich im Herbst des gleichen Jahres in die Volksschule ein, und nach Besuch der ersten vier Klassen am 1. September 1943 an die Oberschule in Bischofteinitz über.

Nach Kriegsende 1945 erfolgte die Vertreibung der deutschen Bevölkerung aus dem Sudetenland, wodurch auch meine Eltern die Heimat verloren. Nach längerem Umherirren fand die Familie schließlich in Michelau bei Lichtenfels einen neuen Wohnsitz. Hier ist mein Vater wieder in seinem Beruf als Volksschullehrer tätig. Am 1. September 1947 trat ich in die vierte Klasse der Realschule in Lichtenfels ein. Die siebte und achte Klasse besuchte ich an der Oberschule zu Bamberg, wo ich auch im Juni 1951 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1951/52 begann ich mit dem Studium der Mathematik und Physik an der Universität Erlangen, und war hier ohne Unterbrechung bis zum Sommersemester 1956 als Hörer eingeschrieben. Im Herbst 1953 legte ich die Vorprüfung, im Herbst 1956 das Staatsexamen für das Höhere Lehramt ab. Nach einer durch eine Krankheit bedingten Unterbrechung setzte ich das Studium vom Sommersemester 1957 bis zum Wintersemester 1957/58 mit dem Ziel der Promotion in der Mathematik fort. Vom 1. 11. 1953 bis zum 1. 3. 1958 war ich als Hilfsassistent am Mathematischen Institut der Universität Erlangen angestellt. Seit 1. 4. 1958 bin ich Vertreter einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Würzburg.

